

自适应分数阶 TV 修复算法与研究

谢 斌^{1,2}, 丁成军¹, 刘 壮¹

(1 江西理工大学 信息工程学院, 江西 赣州 341000; 2 深圳大学 信息工程学院, 广东 深圳 518060)

摘 要: 针对传统 ROF 模型在修复图像时易产生阶梯效应, 提出了一种自适应分数阶 TV 修复算法. 该算法利用分数阶微分的全局性, 将 ROF 修复模型的正则项由一阶微分拓展到分数阶微分, 有效地解决了传统 ROF 模型在修复图像时所产生的阶梯效应. 另外, 为了更好地保持修复图像的边缘, 在分数阶微分正则项上设计了一个自适应边缘指示算子. 由于该模型与鞍点结构的优化模型上具有相似性, 所以在算法上采用基于预解式的原始对偶算法对新模型进行求解, 并且采用自适应卷积滤波函数来自由地控制新模型修复扩散的强弱. 实验结果表明: 相比于传统的 TV、TGV 修复算法, 文中提出的自适应分数阶 TV 修复算法有着更好的修复效果, 能够对诸如斑块、划痕、文字等类型的图像破损进行较好地修复.

关键词: 图像修复; 分数阶 TV; 自适应; 原始对偶

中图分类号: TN911.73

文献标识码: A

文章编号: 1000-7180(2017)12-0045-05

Adaptive Fractional Order TV Repair Algorithm and Research

XIE Bin^{1,2}, DING Cheng-jun¹, LIU Zhuang¹

(1 College of Information Engineering, Jiangxi University of Science and Technology, Ganzhou 341000, China;

2 College of Information Engineering, Shenzhen University, Shenzhen 518060, China)

Abstract: According to the traditional ROF model is prone to produce the staircase effect when repairing images, a new adaptive fractional TV repair algorithm is proposed. The algorithm uses the globality of fractional differential to extend the regular term of ROF repair model from first order differential to fractional differential, which effectively solves the staircase effect of traditional ROF model in repairing image. In addition, in order to maintain the edge of the repair image better, an adaptive edge instruction operator is designed on the fractional differential regular term. Because of the similarity between the model and the optimization model of the saddle point structure, the new model is solved by using the primitive dual algorithm based on the prerequisite, and the adaptive convolution filter function is used to control the diffusion of the new model repair. The experimental results show that compared with the traditional TV and TGV repair algorithm, the adaptive fractional TV repair algorithm proposed in this paper has better repair effect and can be better repaired for image damage such as patches, scratches and text.

Key words: image inpainting; fractional TV; adaptive; primitive duality

1 引言

图像修复在图像处理领域一直都是倍受关注的问题, 通过对一幅破损图像进行修复从而使其无限的接近和达到原始图像的像素信息或视觉效果, 这一工作在日常生活中也有着极其重要的意义^[1]. 从数学角度分析, 图像修复实质上是为了求解一个病

态的逆问题. 由于无法从缺损图像中获取更多有关于其缺损部分的准确信息, 所以只能通过一些相应的数学模型来对图像缺损区域的周边邻域可知的先验信息来不断地模糊和概化其缺损部分的内容, 从而达到所谓的修复效果.

现阶段, 图像修复大致可以分为两种类型, 即基于纹理合成的修复方法和基于非纹理的修复方法.

收稿日期: 2017-04-08; **修回日期:** 2017-05-10

基金项目: 国家自然科学基金(61363076); 江西省自然科学基金(20142BAB207020)

基于纹理合成的修复方法在选定修复区域的边界通过对周围先验区域进行块匹配的方式选择适合的纹理进行填充^[2-4]. 但有时在填补破损区域时也会存在修复痕迹突出和匹配不精确的缺点. 基于非纹理的修复方法在选定修复区域的边缘先验区域通过相应的数学模型来向破损区域不断的扩散来达到原有的图像信息. 该方法最初是由 Rudin 等人^[5]所提出的一种全变差(Total Variation, TV)正则化图像去噪数学模型,而后再由 Chan 等^[6]人把其移植到了图像修复领域,并且在实验中取得了较好的效果. 但是这类模型虽然能够有效的修复图像,但不能满足人类视觉感知的连通性. 因此,Zhang 等人^[7]提出了分数阶图像去噪变分模型,并采用 Chambolle 投影算法求解该模型,使得去噪过程中保持更精细的尺度特征. 而后由 TianDan 等人^[8]提出了一种分数阶原始对偶去噪模型,因为此模型能与鞍点优化模型建立对等关系,所以采用原始对偶算法来求解该模型. 在此基础上,同时使用自适应步长来自由的调整其运算参数,有效的实现了去噪的同时也较好的保持了图像的结构细节特征.

本文在此基础上,将分数阶微分引入到图像修复领域,提出了一种自适应分数阶原始对偶修复模型.

2 TV 修复模型

TV 修复图像的方法是一种基于偏微分方程的图像修复方法,其修复的过程如图 1 所示. 由待修复区域 D 的边缘区域 E (邻域) 不断的向待修复区域扩散的过程. TV 修复模型可以表示为

$$\min_u \int_{D \cup E} |\nabla u| dx dy + \frac{\lambda}{2} \int_E |u - u_0|^2 dx dy \quad (1)$$

式(1)中, $\min$ 表示求其最小值运算,第一项为正则项,作用是在 $D \cup E$ 区域内的图像总变分求取最优. 第二项为保真项,作用是平滑修复区域. u 为原始图片, u_0 为破损图片, λ 为正则化参数,用于平衡上述两项信号变化的相似性以确保结果图像上的灰度变化与初始受损图像基本保持一致,使得修复后的图像分段连续.

由式(1)可知,能量泛函的梯度下降方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + \lambda_E (u_0 - u) \quad (2)$$

式中, $\lambda_E = \begin{cases} \lambda, x \in E \\ 0, x \in D \end{cases}$, $\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right)$ 为扩散项, $\frac{1}{|\nabla u|}$

为扩散系数,其作用是修复图像时平衡图像在不同

梯度下的扩散强弱,以此来避免图像修复后破损区域与其邻域之间过度的平滑. 由于 TV 模型中的扩散是各向异性的,所以 TV 修复模型不仅能有较好的修复效果,而且还有良好的保边性. 但是 TV 修复模型在修复图像时只能有效的逼近分片常数,因此,在修复结果中常常出现“阶梯效应”.

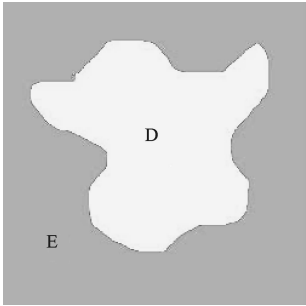


图 1 图像待修复域及其邻域示意图

3 自适应分数阶 TV 修复模型

分数阶微分实质上是整数阶微分的一种推广形式,它是研究在合理阶次间分数阶阶次的微分和积分的一个特性及合理的应用到图像处理邻域与求解数学反问题的一个分数阶微分算子. 为了解决上述出现的问题,文中将 ROF 修复模型的正则项由一阶微分拓展到分数阶微分,发现能够有效的解决其在修复图像时所出现的“阶梯效应”.

图 2 所示是分数阶幅频特性响应曲线,从频域的角度分析,分数阶微分的阶次越高那么中频和高频的信号能够有效的被增强. 即,在图像修复中,低频、中频对应图像破损的平滑部分,高频对应图像的破损的边界部分. 因此分数阶修复模型不仅能够在有效的修复破损区域的同时还能保证图像的细节.

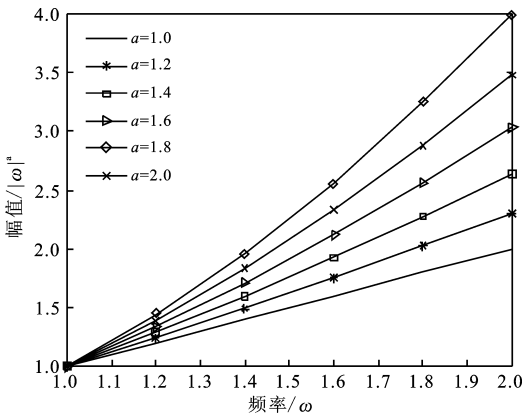


图 2 幅频特性响应曲线分析图

从数学角度分析,分数阶微分中有多种函数对

其进行了相应的定义. 尤其是 Grünwald-Letnikov (G-L)定义构造的分数阶梯度算子,其离散形式为,

$$(\nabla^a u)_{i,j} = ((\Delta_1^a u)_{i,j}, (\Delta_2^a u)_{i,j}) \quad (3)$$

式中,

$$(\Delta_1^a u)_{i,j} = \sum_{k=0}^{k-1} (-1)^k C_k^a u_{i-k,j} \quad (4)$$

$$(\Delta_2^a u)_{i,j} = \sum_{k=0}^{k-1} (-1)^k C_k^a u_{i,j-k} \quad (5)$$

$$C_k^a = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)} \quad (6)$$

式(6)中, k 表示分数阶梯度算子的展开项, $\Gamma(\cdot)$ 表示 Gamma 函数.

由上可得,自适应分数阶 TV 修复模型为,

$$\min_u \left(v(x) \parallel \nabla^a u \parallel_1 + \frac{\lambda}{2} \parallel u - u_0 \parallel_2^2 \right) \quad (7)$$

式(7)中,分数阶正则项的离散形式为,

$$\parallel \nabla^a u \parallel_1 = \sum_{i,j} |(\nabla^a u)_{i,j}| \quad (8)$$

其中,

$$|(\nabla^a u)_{i,j}| = \sqrt{((\Delta_1^a u)_{i,j})^2 + ((\Delta_2^a u)_{i,j})^2} \quad (9)$$

由此可见,分数阶梯度算子所构成的全局算子比一阶微分算子所构成的局域算子在修复图像时能更好的结合破损区域邻域的先验区域,亦能够更多的保证图像的细节部分,从而达到更好的修复效果.

同时,在分数阶微分的正则项上设计的一个自适应边缘检测算子,

$$v(x) = \frac{1}{1+t|\nabla V_\sigma * u_0|} \quad (10)$$

式中, ∇V_σ 为维纳滤波, $t \geq 0$ 为权重.由上式可见,当 $t=0$ 时,此模型就变为一个单纯的分数阶 TV 修复模型.那么从模型中可以看出,当 t 值一定, $|\nabla V_\sigma * u_0|$ 较大时,即对应图像的边缘区域,则 $v(x)$ 变得较小,这时正则项的扩散变得很弱.假如这个区域有破损那么在修复破损的同时该周围的边缘信息能够较好地保持; $|\nabla V_\sigma * u_0|$ 较小时,即对应图像的平滑区域,假如这个区域有破损那么破损区域将很快的被修复.总之,自适应算子根据图像不同区域的破损能够自行选择其控制扩散的强弱,从而来更好的修复其破损区域使其无限的接近其原来的像素信息.

由此可见,该模型由一阶有限的局域微分算子扩展到分数阶无限的全局微分算子,因此分数阶 ROF 模型较经典的 ROF 模型有更多的全局性,同时,在分数阶正则项设计了一个自适应边缘指示算子,并采用自适应卷积滤波函数来自由地控制新模

型修复扩散的强弱.因此,新模型在图像修复时能够更好的在去除阶梯效应的同时又具有较好的保边性能.

4 分数阶 TV 原始对偶修复算法

众所周知,在图像修复中 ROF 修复模型大部分采用经典的梯度下降法.但这种算法在模型离散过程中,必然会使得图像破损区域及其邻域产生较强的阶梯效应.因此,为了克服这一困难,以及上述提出的新模型又与线性鞍点结构下求取最优值的模型上极具有相似性,所以在算法上采用基于预解式的原始对偶算法对新模型进行求解,即分数阶原始对偶修复算法^[9].该算法不仅能够保证其修复效果的同时还能克服其修复过程中产生的阶梯效应,使得修复后的图像在视觉效果上显得更加的自然.

原始对偶算法最初是由 Chambolle 等人^[10]提出的一种有效的迭代算法,它不仅能够有效的处理各种逆问题,而且运算过程相当简单,因此也就有效的加快了新模型的修复速度.

为了能够更好的利用分数阶原始对偶算法求解新模型(8),首先,对新模型进行 Legendre-Fenchel 变换,即可以推得新模型(7)的对偶形式为,

$$\min_{u \in X} \max_{p \in Y} \langle \nabla^a u, p \rangle + \frac{\lambda}{2} \int_E |u - u_0|^2 dx \quad (11)$$

式中, $P = \{p = (p_1, p_2) \mid \parallel p \parallel_\infty \leq \beta\}$.

由(11)式可得求解模型(7)的分数阶原始对偶修复算法如下:

步骤一:初始化: $u^0, u^{-0}, p^0, \sigma, \mu, \tau, \beta > 0$,

$k=0, t > 0$.

步骤二:计算

$$\begin{cases} p^{k+1} = \text{proj}_p(p^k + \sigma \nabla^a u^{-k}) \\ u^{k+1} = \frac{u^k + \tau \text{div}(p^{k+1}) + \tau u_0}{1 + \tau \lambda} \Big|_E + (u^k + \mu \text{div}(p^{k+1})) \\ \theta_k = 1/\sqrt{1+2\gamma\tau_k}, \tau_{k+1} = \theta_k \tau_k, \sigma_{k+1} = \sigma_k / \theta_k \\ u^{-k+1} = u^{k+1} + \theta_k (u^{k+1} - u^k) \end{cases}$$

直到满足 u^{k+1} 收敛为止.

注:算法中, $\text{proj}_p(p^{-k}) = p^{-k} / \max(1, |p^{-k}| / \beta v)$.

5 数值实验

为了验证本文提出该模型的有效性,分别对三幅大小均为 256×256 的不同类型的破损图像进行修复实验,并比较本文算法和经典 TV、TGV 修复算法的修复结果.为了保证各算法比较的公平性,将从主观视觉效果和客观定量指标两个方面对图像修复的质量进行比较.主观视觉上采用对图像修复后

的部分局部区域放大图来主观肉眼进行评判,客观定量上采用峰值信噪比(PSNR)的精确定量值来进行评判。

实验一:对像素分明的“camera”图像进行修复,目的在于修复图像中的斑块破损区域,本次实验的掩码区域选择的都是一些不同类型,诸如像素分明的边界区域、像素均匀的平滑区域和细节丰富的区域等进行破损处理,以此来保证实验的说明性。首先设定本次实验中的参数以便于更好的修复工作: $\tau=1 \times 10^{-4}$, $\sigma=0.1$, $\beta=1$, $\mu=2.0$, $\lambda=0.6$, $t=0.02$, $\alpha=1.0 \sim 2.0$ 。可以看出,特别在该摄影师局部放大后的肩膀处可以看出,TV 修复模型局部修复不够完全,且有较大的阶梯效应, TGV 所修复的效果要优于 TV 所修复的效果,但同时也有其修复结果不够完全的缺点,而本文提出的自适应分数阶 TV 的修复结果明显要优于前两者,且视觉效果也更加的自然,并有效的减轻了其模型本身带来的阶梯效应。

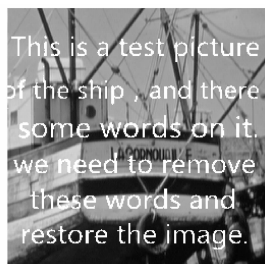
实验二:对含有细节丰富的“lena”图像进行修复,目的在于修复图像中的划痕破损区域,使其无限的接近原图的像素信息。首先设定本次试验中的参数以便于更好的修复工作: $\tau=1 \times 10^{-4}$, $\sigma=0.1$, $\beta=1$, $\mu=2.0$, $\lambda=0.7$, $t=0.02$, $\alpha=1.0 \sim 2.0$ 。可以明显看出,TV 修复模型局部修复不够完全,且有较大的阶梯效应,即 TGV 所修复的效果要略优于 TV 修复的实验效果,但在视觉效果连通上不够完全,而本文提出的自适应分数阶 TV 的修复效果则更加的自然,且放大后的局部图像看起来则有效的去除了边界的阶梯效应。

实验三:对含有文字覆盖的“ship”图像进行修复,目的在于修复图像中的文字覆盖破损区域,可以看出此掩码更具有全局性,因此,从另一个角度更能体现新模型分数阶修复的全局性。首先设定本次试验的参数以便于更好的修复工作: $\tau=1 \times 10^{-4}$, $\mu=2.0$, $\sigma=0.1$, $\beta=1$, $\lambda=0.6$, $t=0.02$, $\alpha=1.0 \sim 2.0$ 。从图 3 中,特别在右侧船杆局部放大可以看出,TV 修复模型局部修复不够完全,还依稀能够看见修复后文字模糊的影子,而 TGV 所修复的结果在局部放大后在视觉效果上虽然基本能够满足修复完全,但仔细看来修复后区域还是略显模糊,而本文算法的局部放大图看起来则和原图最为接近,并有效的解决了其模型本身带来的阶梯效应。

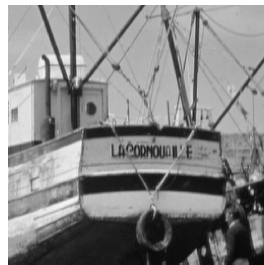
以上三组实验结果图在主观视觉效果上较好的反应了本文算法较其他两种算法更为自然,且更接



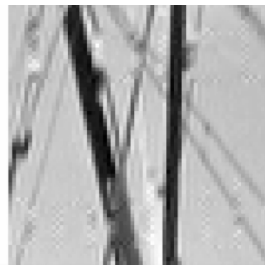
(a) Ship-原图



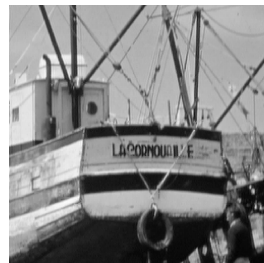
(b) 破损图片



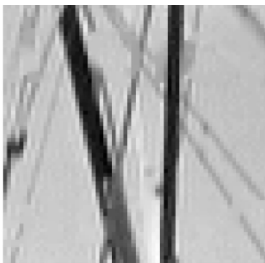
(c) 经典 TV 修复图像



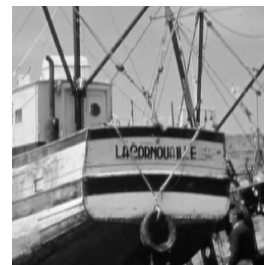
(d) 经典 TV 修复局部放大图



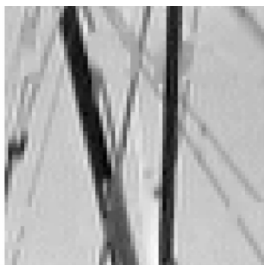
(e) TGV 修复图像



(f) TGV 修复局部放大图



(g) 本文修复图像



(h) 本文修复局部放大图

图 3 两种典型修复模型和本文算法修复效果图及其局部放大图

近原图的图像信息。表 1 将继续从客观角度,采用峰值信噪比(PSNR)作为客观评判指标,进行定量分析新模型的修复性能。

$$\text{PSNR} = 10 \lg \frac{\max_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}} |(u_0)_{i,j}|^2}{\frac{1}{MN} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N [(u_0)_{i,j} - u_{i,j}]^2} \quad (12)$$

式中, u_0 表示无破损的原始图片, u 表示利用新模型修复后的图片。

列出三幅不同类型的破损图像修复后图片的峰值信噪比(PSNR)。

表 1 TV、TGV 及分数阶不同阶次下图像修复峰值
信噪比的定量分析比较

NAME	TV	TGV	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8	2.0
CAMERA	36.347 3	38.674 1	38.485 7	38.652 2	38.854 6	39.087 3	39.142 1	39.025 8
LENA	41.184 9	41.351 7	41.266 2	41.312 5	41.689 9	41.930 0	42.225 8	42.158 9
SHIP	36.036 7	37.374 6	37.148 6	37.325 6	37.403 6	37.567 2	37.586 6	37.523 5

由表 1 可知,文中算法的峰值信噪比呈现先增大后减小的趋势.这也从侧门映证了 α 范围选择的合理性.因此,最终固定参数选取为 $\alpha=1.8$,以此来确定本文算法的最优峰值信噪比.同时,在三组实验数据分析比较可以得出,本文算法的最优峰值信噪比较其他两种算法比较都有较明显的提升.从而更进一步的从客观角度表明,本文算法的有效性.

6 结束语

在研究分数阶 ROF 去噪模型的基础上提出了一种自适应分数阶 TV 修复模型.该模型充分的利用分数阶微分来保证其修复效果的全局性.同时采用自适应卷积滤波函数来自由的控制其修复扩散的强弱,并结合最近提出的原始对偶算法给出了一种有效的数值计算方法.有效地解决了 TV 修复图像所带来的“阶梯效应”,并且能够更好的保留其修复后的边缘和细节使得修复后图像与原图信息基本保持一致.实验结果表明,自适应分数阶 TV 修复模型在主观视觉效果和客观峰值信噪比上明显优于本文所略举的两种方法.

参考文献:

[1] 贾大春,姚旭东. 基于图像的车牌缺损区域恢复识别算法研究[J]. 微电子学与计算机, 2012, 29(9): 181-183.

[2] Zhou T, Johnson B, Li R. Patch-based texture synthesis for image inpainting[J]. 电子与信息学报, 2009, 31(6):1319-1322.

[3] Xu K, Wang N, Gao X. Image inpainting based on sparse representation with dictionary pre-clustering [C]//Chinese Conference on Pattern Recognition. Sin-

gapore, Springer, 2016: 245-258.

[4] 冯象初,王斯琪,李小平. 图像修复问题的低秩对偶逼近算法[J]. 西安电子科技大学学报, 2016, 43(4): 172-177.

[5] Rudin L I, Osher S, Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1992, 60(1/4): 259-268.

[6] Chan T F, Shen J. Variational image inpainting[R]. USA, California Univ Los Angeles Dept Of Mathematics, 2005.

[7] Zhang J, Wei Z. Fractional variational model and algorithm for image denoising[C]//Natural Computation, 2008. ICNC'08. Fourth International Conference on, China, Jinan, IEEE, 2008: 524-528.

[8] Tian D, Xue D, Wang D. A fractional-order adaptive regularization primal-dual algorithm for image denoising[J]. Information Sciences, 2015, 296(7):147-159.

[9] Wen Y W, Chan R H, Yip A M. A primal-dual method for total-variation-based wavelet domain inpainting [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2012, 21(1): 106-114.

[10] Chambolle A, Pock T. A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging [J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2011, 40(1): 120-145.

作者简介:

谢斌 男,(1977-),博士研究生,副教授.研究方向为数字图像处理与现代通信技术.

丁成军(通讯作者) 男,(1992-),硕士研究生.研究方向为数字图像处理. E-mail:15770856188@163.com.

刘壮 男,(1992-),硕士研究生.研究方向为数字图像处理.